ホップ代数と結び目不変量(ホップ代数と量子群)

竹内, 光弘

数理解析研究所講究録
997 巻 1997 年 134-149

ホップ代数と結び目不変量

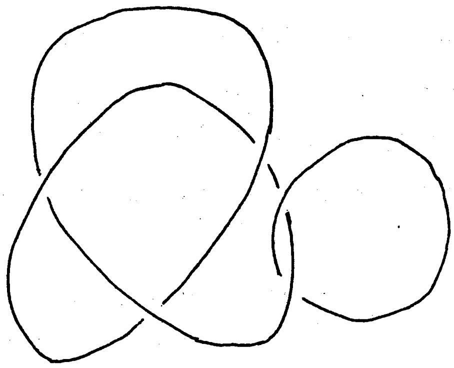
筑波大数学系 竹内光弘 (Mitsuhiro Takeuchi)

この報告では Kauffman [1] による，ホップ代数を用いた結び目やリンクの不変量の構成について解説する．類似の解説は Radford [3] にも見られるが，代数的な細部にこだわりすぎて，Kauffman のアイデアの斬新さが十分伝わって来ないように思われる．

以下の小文を読むのにほとんど予備知識は要らないが，結び目とリンクについて，河野 [2] の第２話ていどの基礎知識を仮定する．

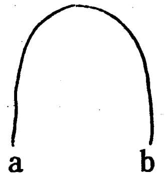
1. リンクダイアグラムを式で表す

ここで考える結び目やリンクは向きをもたないものとする．リンクダイアグラムを図示する場合，右のように十分なめらかな曲線で，特異点をもたぬように，かつすべての交差点が曲線の極大点や極小点を避けるように描くものとする．従ってダイアグラムは，上下と左右の区別のある平面(たとえば座標平面)に置かれていると考える．このようなダイアグラムは，交差点，極大点，極小点と異なる，曲線上の有限個の点で切ることにより次の５通りの要素に分解できる．



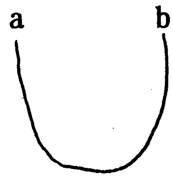
$= I^{b}{}_{a}$

[arc]



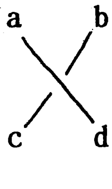
$= M_{ab}$

[cap]

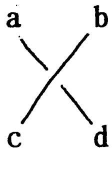


$= M^{ab}$

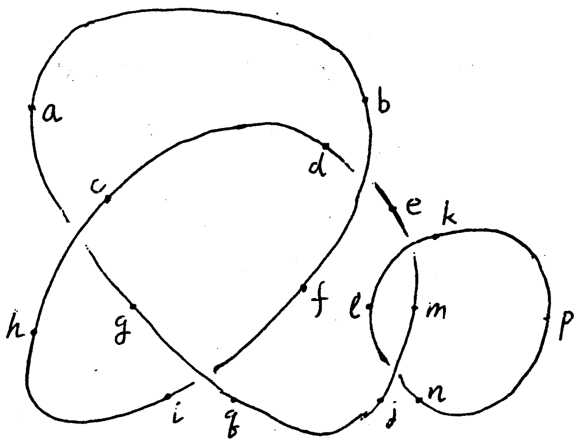
[cup]



$= R^{ab}{}_{cd}$



$= \overline{R}^{ab}{}_{cd}$

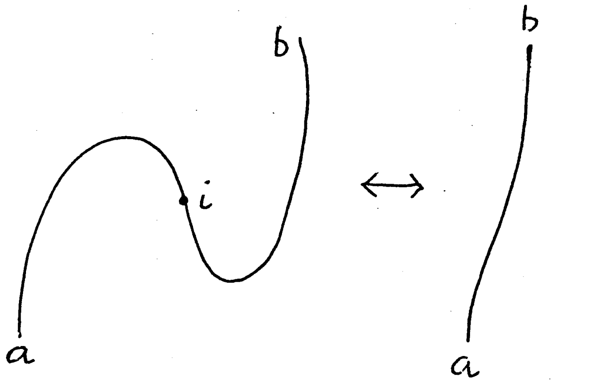


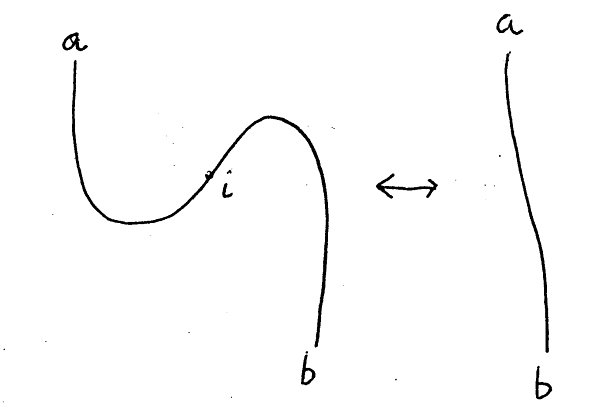
たとえば前のリンクダイアグラムを右のように曲線上の１６個の点 a ～ q で切り離すと，このダイアグラムは次の“式”

$M_{ab}M_{cd}\bar{R}^{ac}{}_{hg}\bar{R}^{db}{}_{fe}M^{hi}M^{qj}\bar{R}^{ek}{}_{lm}\bar{R}^{lm}{}_{jn}M_{kp}M^{np}R^{gf}{}_{iq}$

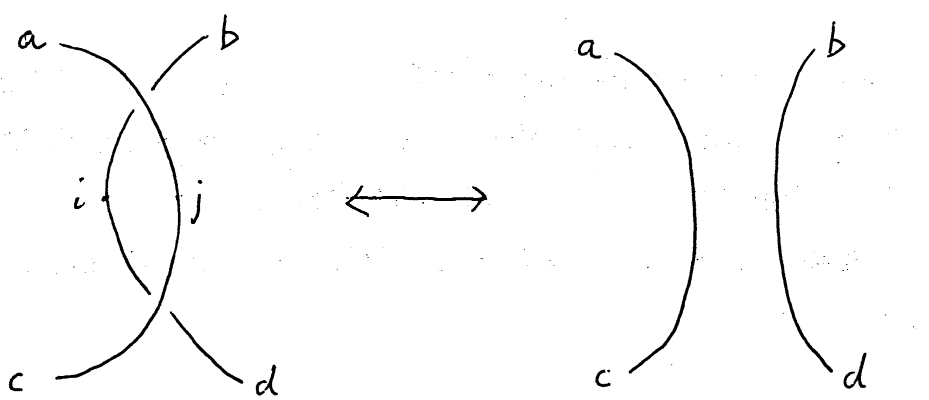
で表される．この表示で a ～ q はダミー変数であり，別の文字で表示してもよい．a ～ q は上付の添字として丁度１回ずつ，下付の添字として丁度１回ずつ現れる．リンクダイアグラムのこのような表示を Kauffman は abstract tensor expression とよんでいる．任意のリンクダイアグラムはその abstract tensor expression から再構成できる．abstract tensor expression は前記５種類の要素をどのようにつなぎ合せれば，もとのリンクダイアグラムが復元できるかを説明する，一種の回路図のようなものである．従って M_{ab}，$R^{cd}{}_{ef}$ 等の変数を並べる順序は任意である．いいかえると，これは，リンクダイアグラムを，M_{ab}，M^{cd}，$R^{ef}{}_{gh}$ 等を生成元とするある代数系の元として表そう，ということである．Kauffman はこの代数系を abstract tensor algebra とよんでいる．この代数系は上記５種類の添字つき変数を生成系とし，以下に説明する基本関係で定義されたある可換代数系である．

Ⅰ．$M_{ai}M^{ib} = I^{b}{}_{a}$，　　$M^{ai}M_{ib} = I^{a}{}_{b}$

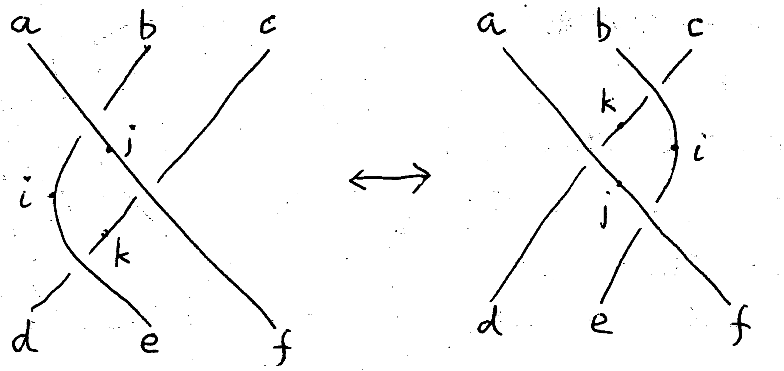




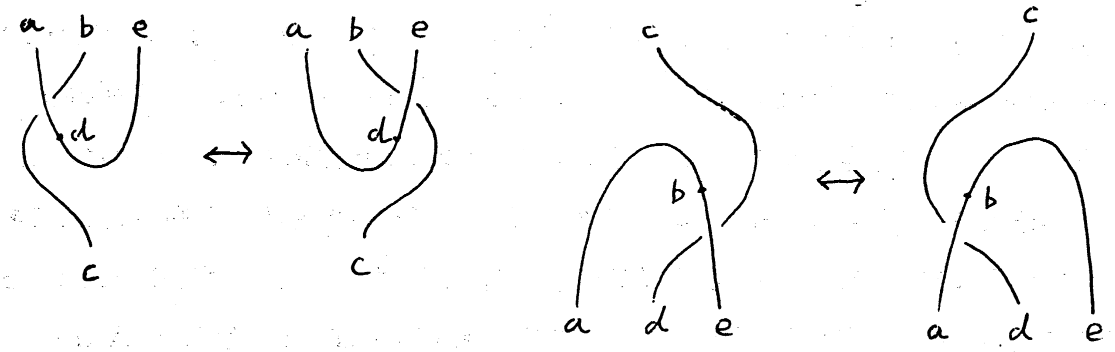
Ⅱ．$R^{ab}{}_{ij}\bar{R}^{ij}{}_{cd} = I^{a}{}_{c}I^{b}{}_{d}$



III. $R^{ab}{}_{ij}R^{jc}{}_{kf}R^{ik}{}_{de} = R^{bc}{}_{ki}R^{ak}{}_{dj}R^{ji}{}_{ef}$ (Yang-Baxter 方程式)

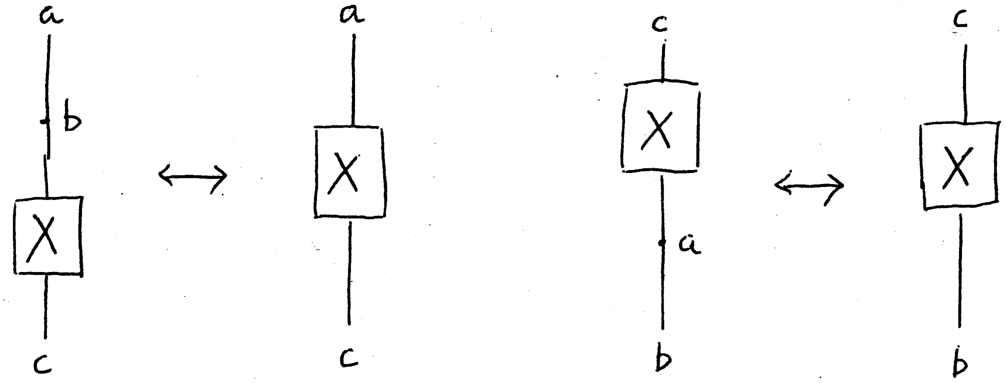


IV. $R^{ab}{}_{cd}M^{de} = M^{ad}\bar{R}^{be}{}_{dc}$,　　　　$M_{ab}R^{bc}{}_{de} = \bar{R}^{cb}{}_{ad}M_{be}$



この他に次の関係式を用いる.

V. $I^{a}{}_{b}X^{b}{}_{c} = X^{a}{}_{c}$,　　　　$I^{a}{}_{b}X^{c}{}_{a} = X^{c}{}_{b}$



2. tangle algebra と tangle monoid

Kauffman による abstract tensor algebra の定義 [1, p.746] には多少の混乱が見られるので, 次に述べる tangle monoid (又は tangle algebra) の枠組を用いて理解するとよいように思う. (他のアプローチについては5節を参照されたい).

S を任意の可算無限集合とする. 次の構造をもつ代数系 Λ を (S を添字集合とする) tangle monoid とよぶ.

(1) $\Lambda = \coprod_{I,J} \Lambda^I{}_J$ (I, J は S の互に disjoint な有限部分集合のペア全体にわたる)

(2) $I \cap K = \phi$ (空集合), $J \cap L = \phi$ のときにのみ乗法

$$\Lambda^I{}_J \times \Lambda^K{}_L \to \Lambda^M{}_N$$

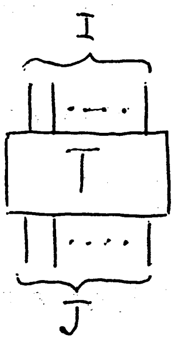
が定義されている. ここで M, N は $I \cup K$, $J \cup L$ からその共通部分 $(I \cap L) \cup (J \cap K)$ を取去ったものである.

(3) 乗法は可換, 結合的である. とくに $\Lambda^\phi{}_\phi$ は可換モノイドをなすが, これは単位元をもつ.

(4) $\sigma : I \cong I'$, $\tau : J \cong J'$ のとき, (σ, τ) は自然な全単射 $\Lambda^I{}_J \cong \Lambda^{I'}{}_{J'}$ を引起こす(置換写像とよぶ). 置換写像は σ, τ につき functorial で, かつ (2) の乗法と両立する.

(5) $\forall\, a \neq b$ in S に対し関係式 V と同じ働きをする元 $I^a{}_b \in \Lambda^{\{a\}}{}_{\{b\}}$ が存在する.

多少解説を加えると, $\Lambda^I{}_J$ の元は下図のような



tangle をあらわしていると考えてよい. (ただし, I, J は順序を持たない, 単なる集合であることに注意する). このような tangle を ${}^I{}_J$-tangle とよぶことにすると, (2) の乗法は ${}^I{}_J$-tangle と ${}^K{}_L$-tangle の上端点と下端点をつないで ${}^M{}_N$-tangle を得る操作を表している. このような操作が可能なためには $I \cap K = \phi$, $J \cap L = \phi$ であることが必要である. たとえば $M^{ab}M^{ac}$ のような接続は意味をもたない. (4) の置換写像は条件 V の中に $X^b{}_c \leftrightarrow X^a{}_c$ の形で使われている. とくに $\Lambda^I{}_J$ と $\Lambda^J{}_I$ の積は $\Lambda^\phi{}_\phi$ に含まれるが, I, J は 任意の他の I′, J′ におきかえられる. たとえば $M^{ab}M_{ab} = M^{cd}M_{cd}$.

$\Lambda^\phi{}_\phi$ は端のない tangle つまりリンクを表している. $\Lambda^\phi{}_\phi$ を簡単に Λ_0 と記す. これが Λ の主要部である.

各 $\Lambda^I{}_J$ が可換環 k 上の module で, Λ の構造が k に関して線形なとき, Λ を k

上の <u>tangle</u> <u>algebra</u> とよぶ．このとき Λ_0 は可換 k 代数となり，Λ は Λ_0 上の tangle algebra とみなせる．

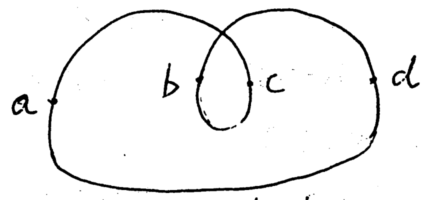
この枠組で，abstract tensor algebra とは，次の生成元

$$I^a{}_b \in \Pi^{(a)}{}_{(b)},\quad M^{ab} \in \Pi^{(ab)}{}_{\phi},\quad M_{ab} \in \Pi^{\phi}{}_{(ab)},$$

$$R^{ab}{}_{cd} \in \Pi^{(ab)}{}_{(cd)},\quad \bar{R}^{ab}{}_{cd} \in \Pi^{(ab)}{}_{(cd)}$$

と関係式 I〜V で定義される tangle monoid Π ということになる．私はこの Π を <u>abstract</u> <u>tangle</u> <u>monoid</u> とよびたい．

K がリンクダイアグラムならばその tensor 表示 T(K) は Π_0 の元とみなせる．Π_0 は T(K) たちの他に右図のように現実のリンクダイアグラムとしては実現できないリンクをも含む．だから Π_0 を abstract links のなす可換モノイドとよぶのがよいと思う．その単位元は空集合をリンクとみたものである．



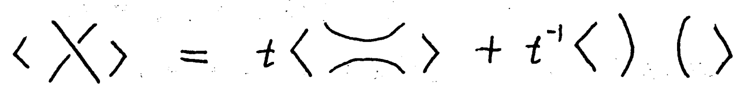
$M_{ac}M_{bd}M^{ad}M^{bc}$

2つのリンクダイアグラムが Reidemeister 移動の II と III（上記関係式の II，III と同じ）のくり返しで互に移り合うときそれらは互に <u>regularly</u> <u>isotopic</u> であるという．

定理1 [1, Theorem 4.2, p. 749]．2つのリンクダイアグラム K，L に対し，T(K) = T(L) であるための必要十分条件はそれらが互に regularly isotopic な事である．

regular isotopy によるリンクの不変量を得るために，可換環 k に対し，可換モノイドの準同形 $\Pi_0 \to k$ を具体的に構成することを考える．そのような代表的な例が，[2，第4話] にも紹介されている Kauffman のブラケット多項式である．この場合 $k = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ にとる．abstract link $L \in \Pi_0$ のブラケット多項式を求めるには，まず L の1つの表示をとり，その表示に現れる $R^{ab}{}_{cd}$，$\bar{R}^{ab}{}_{cd}$ を次のように置きかえる．

$$R^{ab}{}_{cd} = tM^{ab}M_{cd} + t^{-1}I^a{}_cI^b{}_d\ ,\qquad \bar{R}^{ab}{}_{cd} = t^{-1}M^{ab}M_{cd} + tI^a{}_cI^b{}_d$$



こうすると，M^{ab}，M_{ab}，$I^a{}_b$ のみを用いた式の1次結合が得られる．そのさい各項にはダミー変数が上下に1度ずつ現れる事に注意して，M^{ab} と M_{ab} には次の行列

$$M = \begin{bmatrix} 0 & it \\ -it^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (i^2 = -1)$$

の (a, b) 成分を代入し，$I^a{}_b$ にはクロネッカー の δ_{ab} を代入し，すべてのダミーの 1, 2 の上にわたる和をとる．こうして得られる $k = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の元が L のブラケット多項式である．L が現実のリンクダイアグラムの場合は，はじめの操作ですべての交差点が解消して，円 $X = M^{ab}M_{ab}$ の多項式が得られるから，その多項式に $X = -t^2 - t^{-2}$ を代入すればよい．

3. quantum algebra によるリンクの不変量

リボンホップ代数という概念は Reshetikhin と Turaev [4] により導入された．この考えを用いて，正にリボンのおりなす絡み目の不変量が構成できる．実はそのためにはリボンホップ代数のもつ情報のごく一部で十分なのである．たとえば comultiplication Δ は用いられない．リンクの不変量を求めるのに最小限必要な構造を抜きだして，Kauffman は quantum algebra という概念を考えた．

A を可換環 k 上の代数(多元環)，

$$s: A \to A$$

を代数 A の反自己同形

$$G \in A, \quad R \in A \otimes A$$

をそれぞれ単元(可逆元)とする．これらが次の条件を満足するとき，A, s, G, R の組を k 上の <u>quantum</u> <u>algebra</u> とよぶ．

(1) $s^2(x) = GxG^{-1}, \quad x \in A,$

(2) $s(G) = G^{-1},$

(3) $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$ (Yang-Baxter 方程式)

(4) $R^{-1} = (s \otimes 1)R = (1 \otimes s^{-1})R.$

これを用いてリンクの不変量 $\Pi_0 \to k$ を構成するためには，さらに次の条件をみたす線形写像

$$\mathrm{tr}: A \to k$$

が必要になる．

(5) $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$, $\mathrm{tr}(s(x)) = \mathrm{tr}(x), \quad x, y \in A.$

quantum algebra A と上記のようなトレース tr からリンクの不変量が構成される．前に述べたブラケット多項式はその特別の場合として得られる．この不変量 $\Pi_0 \to k$ は以下で２ステップに分けて構成される．

A を quantum algebra とする．元 R を

$$R = \Sigma e\otimes e'$$

と記すことにする．この記法はホップ代数でよく使われるシグマ記法の変形である．文字 e の代わりに f, g, h 等他の文字も自由に使うこととする．とくに (4) は次を意味する．

$$R^{-1} = \Sigma s(e)\otimes e' = \Sigma e\otimes s^{-1}(e').$$

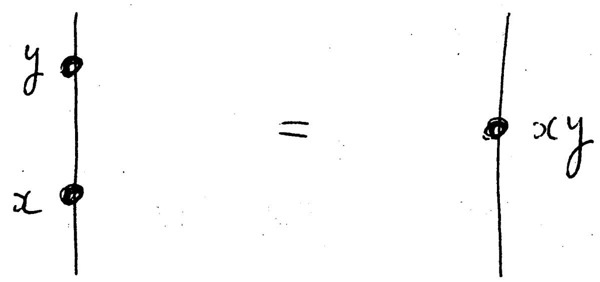
前に tangle monoid Π を構成したのと似たやり方で生成元と関係式により k 上のある tangle algebra [A] が構成される．以下ではダミー変数 (S の元) を a, b, c, d,... A の元を x, y, z, ... と表す．[A] の生成元は次の３種類である．

$$M^{ab} \in [A]^{\{ab\}}{}_{\phi}, \quad M_{ab} \in [A]^{\phi}{}_{\{ab\}}, \quad [x]^a{}_b \in [A]^{\{a\}}{}_{\{b\}}, \quad (x \in A).$$

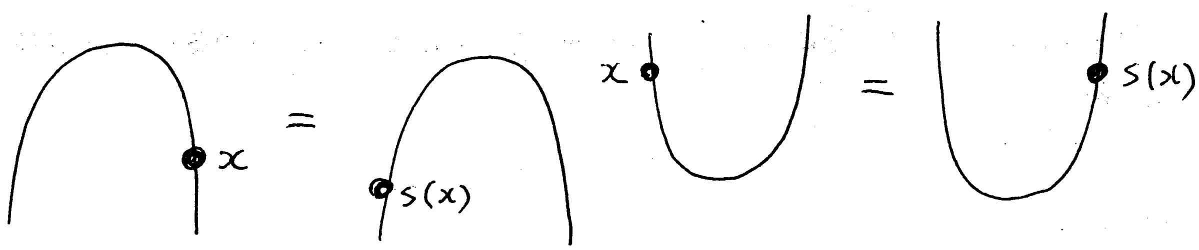
定義関係式としては，Π の定義関係式のうち I と V はそのまま用いる．但し $I^a{}_b = [1]^a{}_b$ とおく．その他に次の関係式を用いる．

i) $[x]^a{}_b$ は x について線形．($[A]^I{}_J$ は k module であることに注意する)．

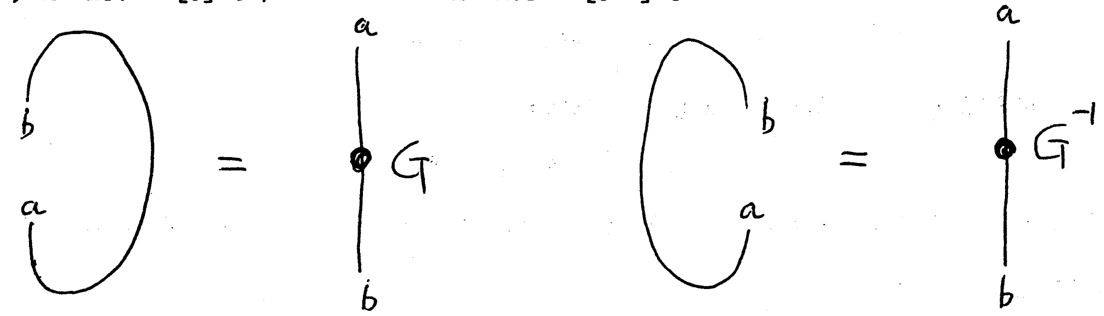
ii) $[x]^b{}_c[y]^a{}_b = [xy]^a{}_c$



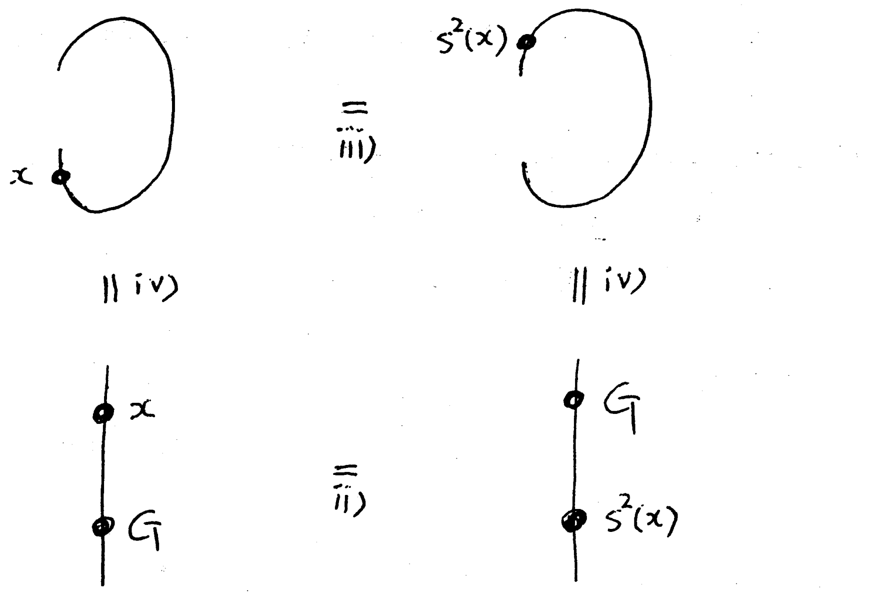
iii) $M_{ai}[x]^i{}_b = [s(x)]^i{}_a M_{ib}$, $\quad [x]^a{}_i M^{ib} = M^{ai}[s(x)]^b{}_i$



iv) $M^{a1}M_{b1} = [G]^a{}_b$, $M^{1a}M_{1b} = [G^{-1}]^a{}_b$



これらの式は，たとえば次のような関係で，互に consistent になっている．



<u>tangle algebra [A] の構造</u>

tangle algebtra [A] は比較的簡単な構造をしている．

$$A^{com-s} = A/k\{xy-yx,\ x-s(x) \mid x, y \in A\}$$

とおくと，$[A]_0$ の k submodule

$$\{[1]^a{}_b[x]^b{}_a \mid x \in A\}$$

は自然に A^{com-s} と同形である．そして $[A]_0$ はその k 上の対称代数になる．つまり

$$S(A^{com-s}) \cong [A]_0$$

$[A]^I{}_J$ は $|I| + |J|$ が偶数 2d のときのみ $\neq 0$ で，このとき M^{ab}, M_{ab}, $I^a{}_b$ たちの disjoint products（共通の添字をもたぬ変数の積）を基底とする自由 $[A]_0 \otimes A^{\otimes d}$ 加群になる．たとえば $[A]^{(ab)}{}_{(cd)}$ は次の６元

$$M^{ab}M_{cd},\quad M^{ba}M_{cd},\quad M^{ab}M_{dc},\quad M^{ba}M_{dc},\quad I^a{}_cI^b{}_d,\quad I^a{}_dI^b{}_c$$

を基底とする自由 $[A]_0 \otimes A^{\otimes 2}$ 加群である．

従って量子代数 A がトレース tr をもてば tr: $A^{com\text{-}s} \to k$ の引起す algebra map

$$[A]_0 \cong S(A^{com\text{-}s}) \to k$$

により係数拡大して，新たな tangle algebra

$$[A, tr] := k \otimes_{[A]_0} [A]$$

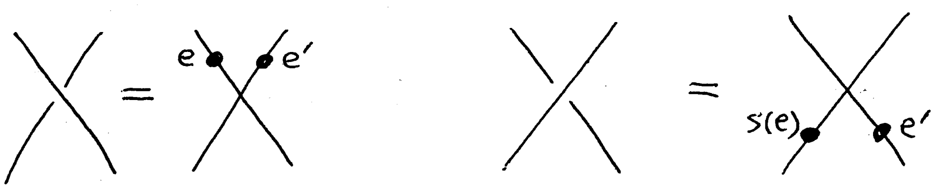
が得られる．その 0-成分は k に帰着し，${}^{I}{}_{J}$-成分は $|I| + |J| = 2d$ のとき自由 $A^{\otimes d}$ 加群になる．

tangle monoid Π を基底として tangle algebra $k\Pi$（Π の tangle monoid algebra）が構成される．Kauffman [1, p.759] の Theorem 5.1 は次のように解釈される．

定理２．A が quantum algebra ならば生成元の次の対応

$$M^{ab} \mapsto M^{ab}, \qquad M_{ab} \mapsto M_{ab}, \qquad I^{a}{}_{b} \mapsto [1]^{a}{}_{b},$$

$$R^{ab}{}_{cd} \mapsto \Sigma [e]^{a}{}_{d} [e']^{b}{}_{c}, \qquad \bar{R}^{ab}{}_{cd} \mapsto \Sigma [s(e)]^{b}{}_{c} [e']^{a}{}_{d}$$



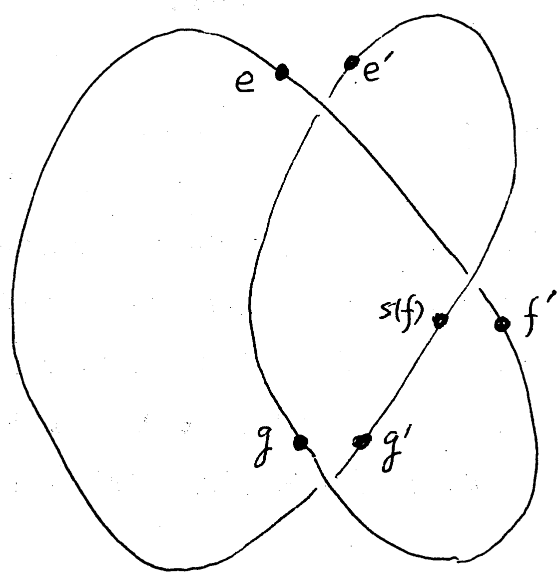
は tangle algebra の準同形 $k\Pi \to [A]$ を引起す．さらに A が trace をもてば，準同形の合成

$$k\Pi \to [A] \xrightarrow{cano} [A, tr]$$

が考えられる．これは 0-成分において，可換モノイド準同形 $\Pi_0 \to k$ を引起す．

これが（A, tr）により構成される Kauffman のリンク不変量である．

例１．右の結び目の不変量を求めるには，３つの交差点に右のように元 R 又は R^{-1} をおき，前述のルール iii）に従ってこれらの元を動かし１ケ所に集めた上でルール ii）のように下から順に積をとる．たとえばいま g と e′ の乗っているタテの枝に元を集めると次の積



$$w = \Sigma g e' s^2(f) s(g') s^3(e) s^3(f')$$

が得られる．この枝から上方に進み，もとの位置に戻るまでに時計回りに d 回まわったとすると（この例では $d = 2$）求める不変量は $\mathrm{tr}(wG^d)$ になる．この d を <u>Whitney degree</u> とよぶ．

例2．$k = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$，$A = M_2(k)$，

$$s\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -t^2 b \\ -t^{-2}c & a \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^{-2} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t(t^{-2}-t^2)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

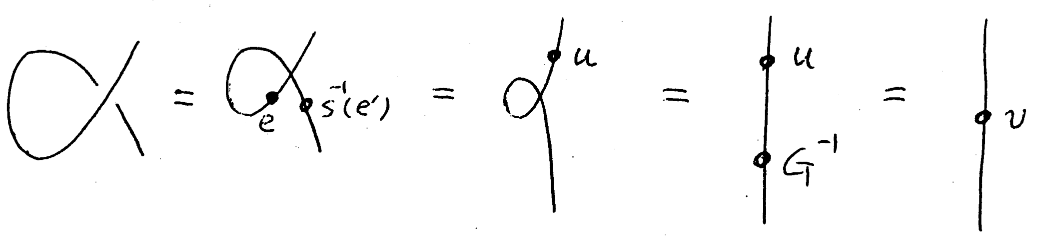
これにより A は quantum algebra になる．さらに通常のトレース

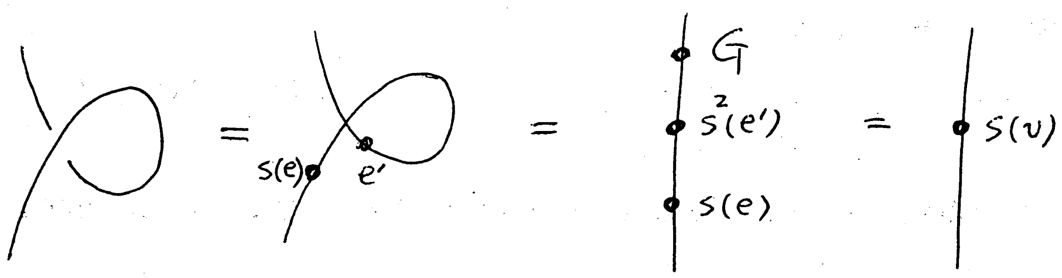
$$\mathrm{tr}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$$

は (5) の条件をみたす．そして (A, tr) の定める不変量が正にブラケット多項式に他ならない[1, p. 760].

リンクと違って両端のある１本のひもでできている tangle の不変量を求めるのにトレースは必要ない．このような tangle に対し A の元が一通りに確定する．もっと一般に n 本の，端のある曲線からなる(ループを含まない) tangle に対し，$A^{\otimes n}$ の元が対応する．

例3．$u = \Sigma s(e')e$，$v = G^{-1}u$ とおく．





この元 u, v について次のことが成立つ.

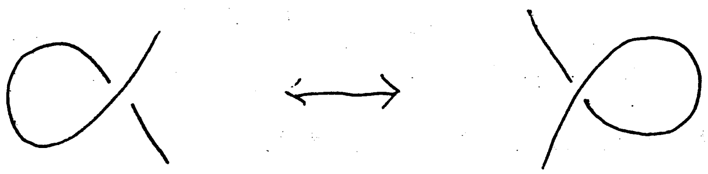
(a) $u^{-1} = \Sigma e' s^2(e)$,

(b) u, v は G と可換, 従って s^2-不変,

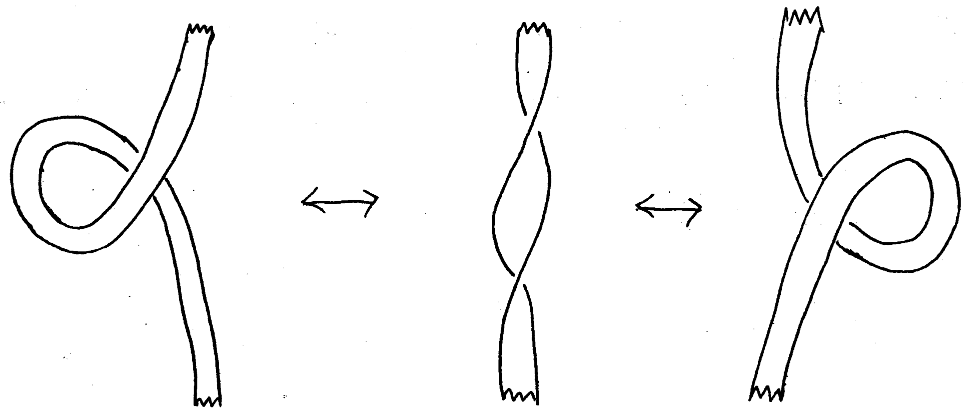
(c) $1 \otimes v$ と $v \otimes 1$ は R と可換.

これらの事実は純代数的にも験証できるが, single component tangle と A の元の対応を用いると図形的に証明できる.

Reidemeister 移動の II, III に, I を弱めた

I′ 

を加えて生成された同値関係を framed equivalence という. 例3により, もし v = s(v) ならば A, tr による Π_0 の不変量は framed equivalence によるリンクの不変量を与えることになる. I′ はリボンに対しては明らかに成立っている.



そこで v = s(v) のとき A をリボン代数とよぶことにしたい. v は結局リボンのねじれの回数をあらわしている.

例2では $v = \begin{bmatrix} -t^3 & 0 \\ 0 & -t^3 \end{bmatrix}$ となり, リボン条件 v = s(v) は成立している. もちろん, ブラケット多項式が framed equivalence の不変量であることはよく知られた事実である.

4. ホップ代数との関係

Drinfeld が quasi-triangular ホップ代数の概念を導入して久しい. A を可換環 k 上のホップ代数とする. $A\otimes A$ の単元 R が次の条件 1), 2) をみたすとき, (A,R) を quasi-triangular ホップ代数というのであった.

1) $R\Delta(x) = \Delta^{op}(x)R, \quad x \in A$

2) $(\Delta\otimes 1)R = R_{13}R_{23}\ , \ (1\otimes\Delta)R = R_{13}R_{12}.$

このとき次が成立つ.

3) $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$ (Y-B 方程式)

4) $R^{-1} = (s\otimes 1)R = (1\otimes s^{-1})R.$

ここで s は A の antipode を表す. 前のように

$$R = \Sigma e\otimes e'\ ,\ u = \Sigma s(e')e$$

とおくと, さらに次が成立つ.

5) $u^{-1} = \Sigma e's^2(e),$

6) $s^2(x) = uxu^{-1}, \quad x \in A.$

このままでは A は quantum algebra にならないので, 次の仮定をおく.

(仮定) group-like 元 G と central 元 v が存在して $u = Gv$ と表せる.

このとき $s^2(x) = GxG^{-1}$, $s(G) = G^{-1}$ が成立つから, A, s, R, G は quantum algebra になる. さらに $v = s(v)$ ならばリボン代数になるが, 普通このとき (A,R,G) をリボンホップ代数とよんでいる[4, p.7].

リンクの不変量を得るためにはさらにトレースが必要であるが, A が体 k 上の有限次元 unimodular ホップ代数のとき, $\lambda \in A^*$ を右積分とすると, それに右から G を作用させて得られる

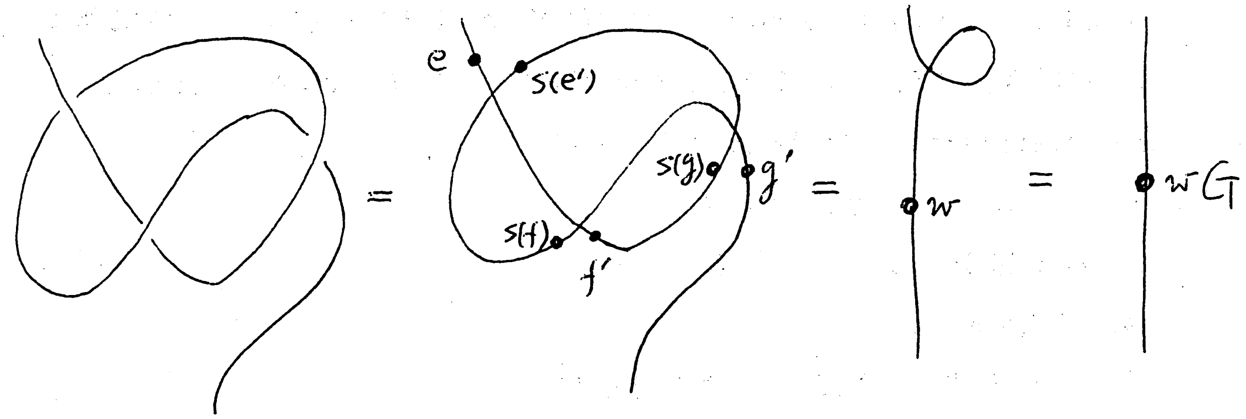
$$tr = \lambda\cdot G$$

はトレースの条件をみたす[3, p.222].

Radford やその指導下にある Gelaki たち [5] は $U_q(\mathfrak{g})$ などの量子群に付随する有限次元ホップ代数についてリボン構造, トレースの性質などを調べつつある. これはホップ代数を用いてリンクや3-manifolds の不変量を構成するための基礎作業といえる.

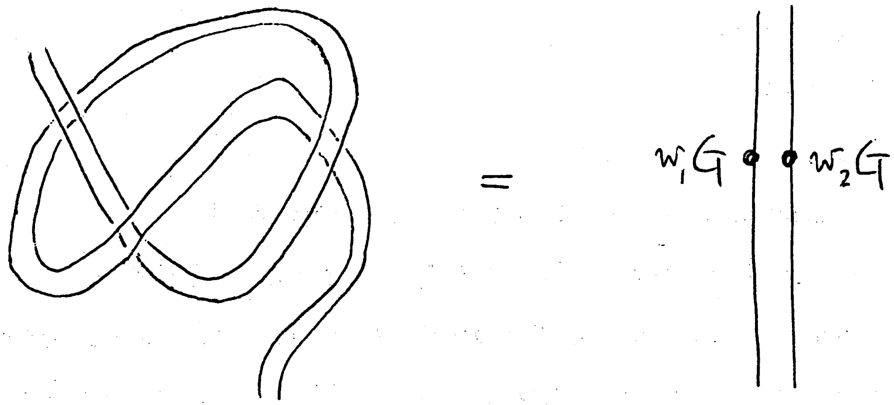
quasi-triangular ホップ代数 A が上記仮定をみたす group-like 元 G をもつとき, A の余乗法 Δ はどんな役割を果たすのだろうか. これに対し Kauffman はきわめて興味深

い観察をしている．この観察では single component tangle と A の元の対応（3節参照）がもとになる．仮に次の single component tangle に A の元 wG が対応したとする．

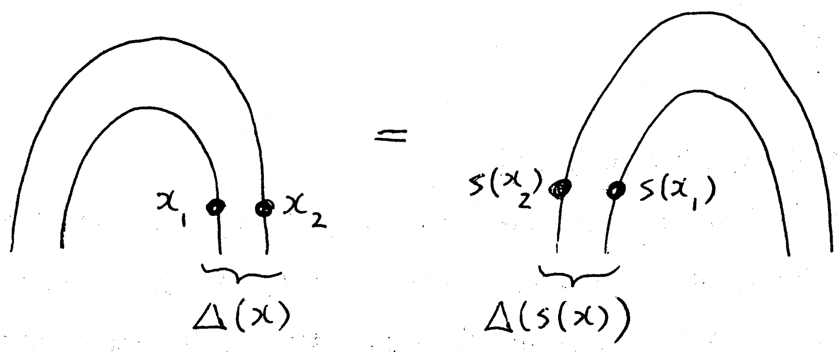


$$w = \Sigma g' f s(e') s^2(g) s^2(f') s^2(e)$$

このとき，曲線を平行な2-cable に自然におきかえて得られる2 component tangle に対応する A⊗A の元を計算すると



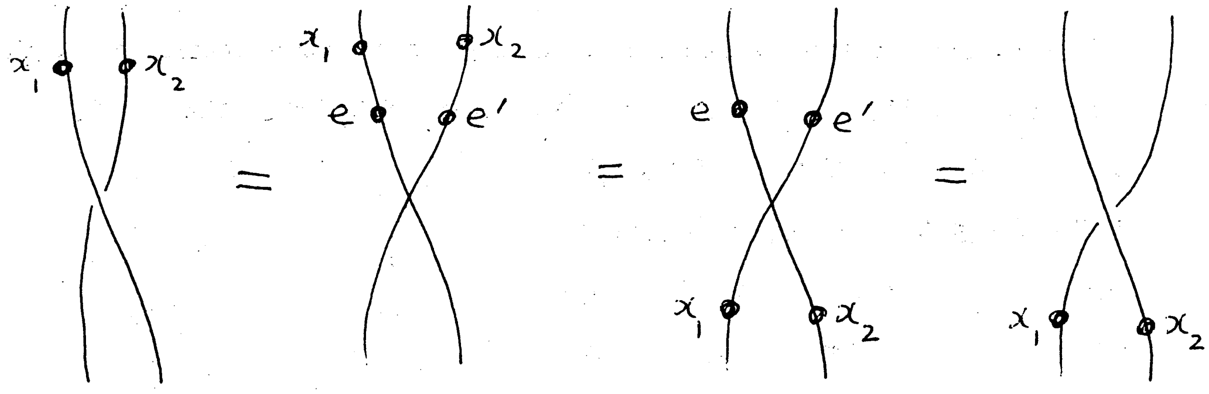
丁度 $\Delta(wG) = \Sigma w_1 G \otimes w_2 G$ になる，というのである．この観察を逆手にとっていろいろなホップ代数的計算を図形で処理することができる．たとえば antipode s が anti-coalgebra map であることは次の図で説明される．



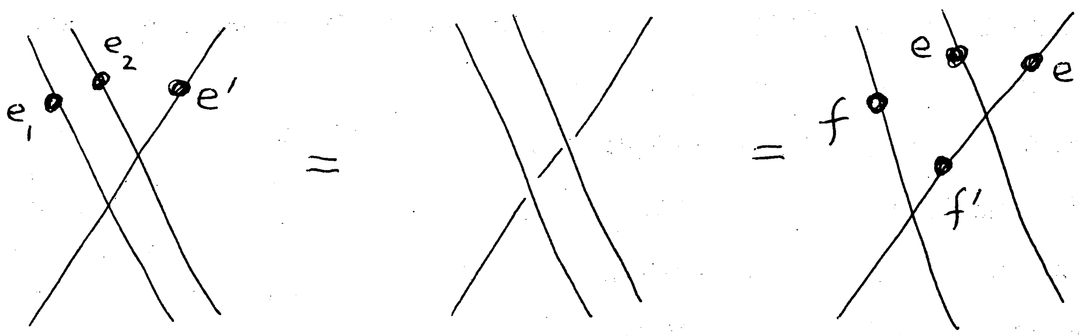
2-cable においてつねに左を 1，右を 2 と番号づけることに注意されたい．

この観点に立つと，quasi-triangular ホップ代数の定義自体に，図形的な自然な解釈

が与えられる．たとえば条件 1）は次の図で説明される．

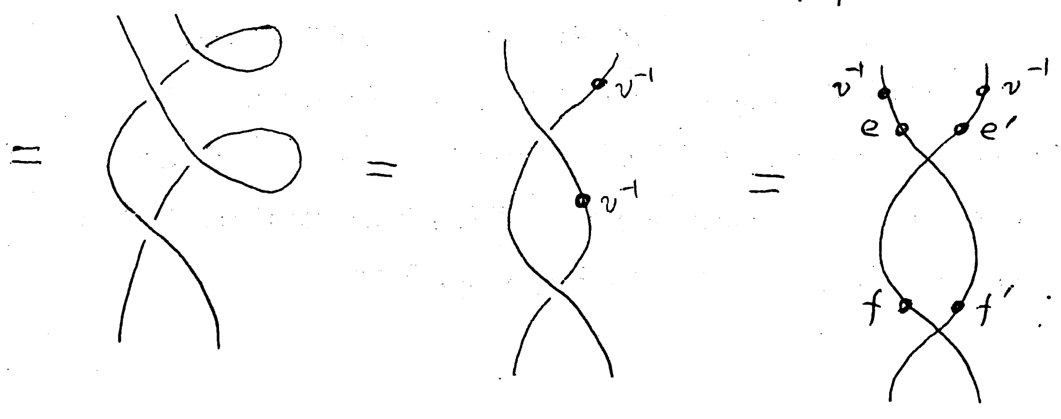


つまり $\Delta(x)$ は交差点を自由に通過する．同様に条件 2）の $(\Delta\otimes 1)R = R_{13}R_{23}$ は次の図で説明される．



最後にこのやり方でリボン元 v の Δ を計算してみよう．

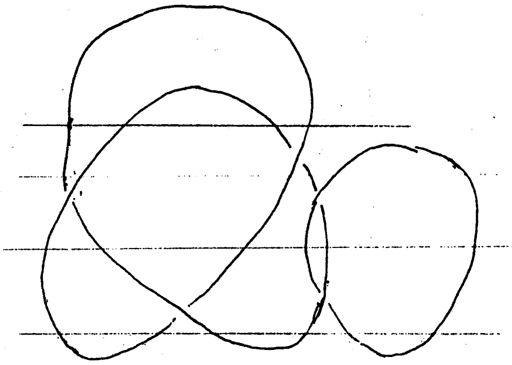
例4．



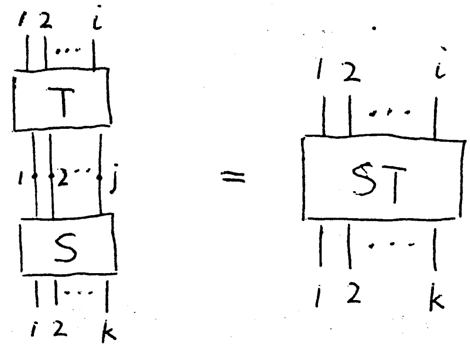
$$\Delta v^{-1} = \Sigma f'ev^{-1}\otimes fe'v^{-1} = R_{21}R_{12}(v^{-1}\otimes v^{-1})$$

5. 他のアプローチ

この小文では Kauffman の abstract tensor algebra を tangle monoide や tangle algebra の立場で説明して来たが，それ以外にも様々な方法が考えられる．下のようにリンクダイアグラムを何本かの，交差点や極大点・極小点を通らない水平線で切って，いくつかの tangle のタテのつみ重ねとして表示することができる．これらの tangle は M_{ab}, M^{ab}, $R^{ab}{}_{cd}$ などの基本的な tangle を横に並べた形をしている．ここでいう tangle は，



(今まで考えた abstract tangle と違って) 上端点，下端点がそれぞれ横１列に並んだものをさす．i 個の上端点，j 個の下端点をもつ tangle の regular isotopy 類の集合を $\Pi^i{}_j$ とする．$S \in \Pi^j{}_k$ と $T \in \Pi^i{}_j$ の積 $ST \in \Pi^i{}_k$ を，これらをつみ重ねて得られる tangle と定義することにより，$\mathbb{N}$ を objects として，いわゆる tangle 圏 Π が得られる．この圏はテンソル積の構造をもっている．その主要部 Π_0 $(= \Pi^0{}_0)$ はリンクの regular isotopy 類からなり，可換モノイドをなす．



同様に [A] を，$\mathbb{N}$ を objects とする tensor category として定義する事が可能である．定理２で述べた準同形

$$k\Pi \to [A] \ (\to [A, tr])$$

は objects の上で identity なる，monoidal functor として構成される．

このやり方で得られる不変量 $\Pi_0 \to k$ は今まで考えたものと同じである．ただ Π_0 の範囲が abstract から real に狭まるというだけである．私としては，このようなカテゴリカルなアプローチより，tangle algebra の考え方の方が，Kauffman の “abstract” tensor algebra の考えを，よりよく汲み取っているように思う．

文献

[1] L. Kauffman, Gauss codes, quantum groups and ribbon Hopf algebras, Reviews in Math. Physics, Vol. 5, No. 4 (1993), 735-773.

[2] 河野俊丈, 組みひもの数理, アウト・オブ・コース ④, 遊星社 1993.

[3] D. Radford, On Kauffman's knot invariants arising from finite-dimensional Hopf algebras, in "advances in Hopf algebras", L. N. in pure and app. math., Vol. 158, 205-266, Marcel Dekker, Inc. 1994.

[4] N. Reshetikhin and V. Turev, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups, Comm. Math. Phys. 127 (1990), 1-26.

[5] S. Gelaki and S. Westreich, Invariants of knots and 3-manifolds arising from $U_q(s\ell_n)'$ and $O_q(SL_n)'$, preprint.